《第４講　総合演習(その４)》

7　連立不等式

$$y \geqq 0,\ \ y^2-2xy+2x^2-1 \leqq 0$$

が表す xy 平面上の領域を x 軸のまわりに１回転してできる立体を D とする以下の問に答えよ．

(1)　不等式 $x-\sqrt{1-x^2} \geqq 0$ を解け．

(2)　不等式 $x+\sqrt{1-x^2} \geqq 0$ を解け．

(3)　t を $-1 \leqq t \leqq 1$ をみたす実数とする．xy 平面上の点 $(t,\ 0)$ を通り x 軸と垂直な平面による D の切り口の面積 $S(t)$ を求めよ．ただし，この平面と D の共通部分がない場合は $S(t)=0$ とする．

(4)　D の体積 V を求めよ．

8　a，c を正の実数，b を複素数とする．すべての複素数 z に対して，不等式

$$a|z|^2+\left(bz+\overline{bz}\right)+c \geqq 0$$

が成り立っているとする．以下の問いに答えよ．

(1)　不等式 $|b|^2-ac \leqq 0$ が成り立つことを示せ．

(2)　すべての複素数 z に対して，不等式

$$a|z|^2+\left(bz+\overline{bz}\right)+c \leqq (a+c)\left(1+|z|^2\right)$$

が成り立つことを示せ．

《第４講　総合演習（その４）》

[7] 連立不等式

$$y \geqq 0,\ \ y^2-2xy+2x^2-1 \leqq 0$$

が表す xy 平面上の領域を x 軸のまわりに１回転してできる立体を D とする以下の問に答えよ．

(1) 不等式 $x-\sqrt{1-x^2} \geqq 0$ を解け．

(2) 不等式 $x+\sqrt{1-x^2} \geqq 0$ を解け．

(3) t を $-1 \leqq t \leqq 1$ をみたす実数とする．xy 平面上の点 $(t,\ 0)$ を通り x 軸と垂直な平面による D の切り口の面積 $S(t)$ を求めよ．ただし，この平面と D の共通部分がない場合は $S(t)=0$ とする．

(4) D の体積 V を求めよ．

【答】 (1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq 1$　　(2) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq 1$

(3) $$\begin{cases} 0 & \left(-1 \leqq t < -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき}\right) \\ \pi\left(1+2t\sqrt{1-t^2}\right) & \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq t < \dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき}\right) \\ 4\pi t\sqrt{1-t^2} & \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq t \leqq 1 \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

(4) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\pi$

【解説】 (1) $1-x^2 \geqq 0$ より $-1 \leqq x \leqq 1$ に注意すると

$$\begin{aligned} x-\sqrt{1-x^2} \geqq 0 &\iff x \geqq \sqrt{1-x^2} \\ &\iff x \geqq 0 \text{ かつ } x^2 \geqq 1-x^2 \\ &\iff x \geqq 0 \text{ かつ } x^2 \geqq \frac{1}{2} \quad \text{よって } \frac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq 1. \end{aligned}$$

(2) (1)と同様に $-1 \leqq x \leqq 1$ に注意すると

$$\begin{aligned} x+\sqrt{1-x^2} \geqq 0 &\iff \sqrt{1-x^2} \geqq -x \\ &\iff (-x \geqq 0 \text{ かつ } 1-x^2 \geqq x^2) \text{ または } (-x<0) \\ &\iff \left(x \leqq 0 \text{ かつ } x^2 \leqq \frac{1}{2}\right) \text{ または } (x>0) \quad \text{よって } -\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq 1. \end{aligned}$$

(3) $x=t$ を $y^2-2xy+2x^2-1 \leqq 0$ に代入して

$$y \geqq 0 \text{ かつ } y^2-2ty+2t^2-1 \leqq 0 \iff y \geqq 0 \text{ かつ } t-\sqrt{1-t^2} \leqq y \leqq t+\sqrt{1-t^2}$$

$$\iff \begin{cases} t+\sqrt{1-t^2}<0 \text{ のとき } y \text{ は解なし} \\ t+\sqrt{1-t^2} \geqq 0 \text{ かつ } t-\sqrt{1-t^2}<0 \text{ のとき } 0 \leqq y \leqq t+\sqrt{1-t^2} \\ t-\sqrt{1-t^2} \geqq 0 \text{ のとき } t-\sqrt{1-t^2} \leqq y \leqq t+\sqrt{1-t^2} \end{cases}$$

なので

$$\begin{cases} -1 \leqq t < -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき} & S(t)=0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq t < \dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき} & S(t)=\left(t+\sqrt{1-t^2}\right)^2\pi \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq t \leqq 1 \text{ のとき} & S(t)=\left(t+\sqrt{1-t^2}\right)^2\pi-\left(t-\sqrt{1-t^2}\right)^2\pi \end{cases}$$

よって $S(t)=\begin{cases} 0 & \left(-1 \leqq t < -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき}\right) \\ \pi\left(1+2t\sqrt{1-t^2}\right) & \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq t < \dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき}\right) \\ 4\pi t\sqrt{1-t^2} & \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq t \leqq 1 \text{ のとき}\right) \end{cases}$

(4)　(3)の結果より

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \pi\left(1+2t\sqrt{1-t^2}\right)dt+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} 4\pi t\sqrt{1-t^2}\,dt \\ &= 2\pi\Big[\,t\,\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}+\pi\left[-\frac{4}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi \end{aligned}$$

8　a, c を正の実数, b を複素数とする．すべての複素数 z に対して，不等式

$$a|z|^2+\left(bz+\overline{bz}\right)+c \geqq 0$$

が成り立っているとする．以下の問いに答えよ．

(1)　不等式 $|b|^2-ac \leqq 0$ が成り立つことを示せ．

(2)　すべての複素数 z に対して，不等式

$$a|z|^2+\left(bz+\overline{bz}\right)+c \leqq (a+c)\left(1+|z|^2\right)$$

が成り立つことを示せ．

【答】 (1)　略　　(2)　略

【解説】 (1)　$a \neq 0$ より

$$\begin{aligned} a|z|^2+\left(bz+\overline{bz}\right)+c &= a\left(z\overline{z}+\frac{b}{a}z+\frac{\overline{b}}{a}\overline{z}+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\left\{\left(z+\frac{\overline{b}}{a}\right)\left(\overline{z}+\frac{b}{a}\right)-\frac{b\overline{b}}{a^2}+\frac{c}{a}\right\} \\ &= a\left|z+\frac{\overline{b}}{a}\right|^2-\frac{|b|^2-ac}{a} \end{aligned}$$

であり $a\left|z+\dfrac{\overline{b}}{a}\right|^2 \geqq 0$ より $-\dfrac{|b|^2-ac}{a} \geqq 0$ となるので $|b|^2-ac \leqq 0$.

(2)

$$\begin{aligned} (a+c)\left(1+|z|^2\right)-\left\{a|z|^2+\left(bz+\overline{bz}\right)+c\right\} &= c|z|^2-\left(bz+\overline{bz}\right)+a \\ &= c\left|z-\frac{\overline{b}}{c}\right|^2-\frac{|b|^2-ac}{c} \end{aligned}$$

となるが，$c>0$ より $c\left|z-\dfrac{\overline{b}}{c}\right|^2 \geqq 0$，(1)と $c>0$ より $-\dfrac{|b|^2-ac}{c} \geqq 0$ なので与えられた不等式は示された．